

基于惯量矩的椭圆拟合方法

丁业兵

DING Yebing

安徽邮电职业技术学院 通信工程系, 合肥 230031

Department of Communication Engineering, Anhui Post and Telecommunication College, Hefei 230031, China

DING Yebing. Ellipse fitting method based on moment of inertia. *Computer Engineering and Applications*, 2016, 52(18): 188-191.

Abstract: In digital image, Hough transform and least square method are unable to deal with ellipse fitting directly, need edge detection and so on, and the process is complex and needs large amount of calculation. Aiming at this problem, this paper puts forward a method of ellipse fitting by image inertia moment. Firstly, it selects the target in the image, converts color image to probability density grayscale; then, the center and inertia moments of principal axis are calculated, and it derives the angle of rotation and inertia moments of centroidal principal axis in the condition that inertia product is zero; finally, it acquires the ellipse parameters of semi-major axis and semi-minor axis according to the centroidal principal axis. Experiments in color image verify the effectiveness and robustness of the proposed method in fitting target ellipse.

Key words: ellipse fitting; moment of inertia; probability density; centroidal principal axis

摘 要: 数字图像中, Hough 变换或最小二乘法无法对图像中物体直接进行椭圆拟合, 需要边缘检测等预处理, 过程复杂且计算量大, 为此, 提出一种直接用图像惯量矩来拟合椭圆的方法。选定图像中要拟合的目标物体, 将彩色图像转换为概率密度灰度图; 计算目标的质心和主轴转动惯量, 并运用形心主轴惯量积为零的条件推导出椭圆旋转角度和形心主轴惯量矩的大小; 由形心主轴惯量矩的大小得出椭圆长半轴和短半轴大小, 从而得到拟合后椭圆的各项参数。彩色图像实验, 验证了该方法拟合目标椭圆的有效性和鲁棒性。

关键词: 椭圆拟合; 惯量矩; 概率密度; 形心主轴

文献标志码: A **中图分类号:** TP391 **doi:** 10.3778/j.issn.1002-8331.1412-0056

1 引言

数字图像处理和视频目标跟踪中, 经常要对目标形状进行检测和识别^[1-2], 而一般目标形状可以用椭圆进行拟合^[3]。大量关于椭圆检测的方法集中于最小二乘法和 Hough 变换法。最小二乘法是随机误差符合正态分布的最大似然估计^[4-5], 将其运用于椭圆拟合中, 即为多元线性回归, 所有样本都参与运算, 不但计算量大, 而且, 容易引入误差较大的样本点, 使椭圆拟合产生偏差。文献[6]先随机选取 6 个点拟合椭圆, 然后计算与此椭圆匹配的样本点, 匹配样本点多的为最优椭圆, 剔除了误差较大样本点^[6]。文献[7]基于非线性最小二乘法, 寻找与边界点欧式距离最短的椭圆进行拟合^[7]。Hough 变换是将原图像坐标空间映射到参数空间^[8-10], 在参数空间中

寻找累积对应点, 容错性和鲁棒性都较好, 参数在不超过二维的情况下, 效果较理想, 但参数空间增大, 计算量将急剧增大。椭圆参数包括中心点位置、长短半轴大小、偏转角度。文献[11]引入内切椭圆的思想, 对图像中边缘点分布进行分析, 提出一种基于弦中点的 Hough 变换椭圆检测方法^[11]。文献[12]从采样点距离限制、形状控制、椭圆判别式三个层次对采样点进行判断, 减少了无效样本点^[12]。文献[13]提出一种基于样本点离心率的椭圆拟合方法, 保留高权重数据点, 丢掉较低权重数据点。在视频目标跟踪中, 需要对目标进行椭圆拟合, 尤其是跟踪人脸, 采用最小二乘法或 Hough 变换及其衍生算法对目标进行椭圆拟合, 需要较为复杂的预处理工作。

本文将物理学中的转动惯量^[14], 也称惯量矩^[15-16], 运

基金项目: 安徽省高校优秀青年人才基金重点项目 (No.2013SQRL121ZD); 安徽邮电职业技术学院院级项目 (No.YJ201403ZR)。

作者简介: 丁业兵 (1978—), 男, 讲师, 研究领域为信号处理、目标跟踪, E-mail: dingyebing@163.com。

收稿日期: 2014-12-03 **修回日期:** 2015-03-18 **文章编号:** 1002-8331(2016)18-0188-04

CNKI 网络优先出版: 2015-06-16, <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2127.tp.20150616.1149.004.html>

用于数字图像目标的椭圆拟合方法中。首先,需要将彩色图像转换为灰度图像,获取目标的概率密度分布,或者是采用图像分割的方法获得目标区域,得到关于目标的一个类似均质平面体,这个平面体的中心位置用求质心的方法获得,将图像坐标系的原点移动到此质心位置,然后根据过形心的主轴惯量积为零的条件,求得主轴方向角,并推导得出关于形心主轴的转动惯量,最后由转动惯量求得长、短半轴的长度,从而获得拟合后的椭圆各项参数。

2 椭圆表示

二维平面坐标中,椭圆的一般方程表示为:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

式中 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 六个参数分别为常数。标准椭圆方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

标准椭圆参数方程为:

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = b \sin(\theta) \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\theta \in [0, 2\pi]$, 如果椭圆中心平移到坐标 (x_0, y_0) , 并旋转 φ 角度, 则平移、旋转后的椭圆参数方程为:

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) \cos(\varphi) - b \sin(\theta) \sin(\varphi) + x_0 \\ y = a \cos(\theta) \sin(\varphi) + b \sin(\theta) \cos(\varphi) + y_0 \end{cases} \quad (4)$$

3 椭圆拟合

3.1 预处理

最小二乘法、Hough 变换通常都要在拟合前对图像进行目标分割、二值化、边缘轮廓提取等预处理操作, 以得到目标边缘的点集。

目标边缘点的准确获取是椭圆拟合的关键所在, 基于惯量矩的椭圆拟合方法, 可以不限于对目标边缘进行提取, 只要知道目标的概率密度分布就可以, 这更加适合于视频目标跟踪中, 在获知目标特征模型后, 在图像上进行反向投影, 便可以得到目标的密度分布图, 类似于平面薄片。

3.2 目标惯量矩和旋转角度

设在图像坐标平面上像素点数为 n , 分别位于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处, 密度, 即对应的像素大小分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$, 则质心坐标为:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (5)$$

对 x 轴、 y 轴的转动惯量依次为:

$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i, I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i \quad (6)$$

图像坐标原点平移到椭圆中心坐标 (x_0, y_0) 位置处的转动惯量为:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2 m_i, I_y = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 m_i \quad (7)$$

原坐标系 x - y 原点平移到椭圆中心后旋转 φ , 得到目标形心主轴坐标系 x_1 - y_1 。

坐标变换公式为:

$$\begin{cases} x_1 = (x - x_0) \cos(\varphi) + (y - y_0) \sin(\varphi) \\ y_1 = (y - y_0) \cos(\varphi) - (x - x_0) \sin(\varphi) \end{cases} \quad (8)$$

图形对形心主轴的转动惯量、惯量积分别为:

$$\begin{cases} I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi \\ I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi \\ I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (9)$$

由形心主轴惯量积为零, 可求得旋转角度 φ 为:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) \quad (10)$$

如果 $2\varphi \in [-\pi/2, +\pi/2]$, 则 $\varphi \in [-\pi/4, +\pi/4]$ 。

将此结果代入式(9)中, 可得形心主轴惯量矩的大小分别为:

$$\begin{cases} I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}{2} \\ I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}{2} \end{cases} \quad (11)$$

若 $I_x > I_y$, 则旋转后, 形心主轴转动惯量 $I_{x_1} = I_{\max}$, 此时, 旋转角度 φ 为长轴与 y 轴的夹角; 若 $I_x < I_y$, 则 $I_{x_1} = I_{\min}$, 此时, 旋转角度 φ 为长轴与 x 轴的夹角。

3.3 椭圆参数

椭圆形平面薄片, 密度均匀, 则质心与形心重合, 椭圆中心点坐标见公式(5)所示。平移原点后, 图形对 x 轴的转动惯量为 I_x , 对 y 轴的转动惯量为 I_y , 当 $I_x > I_y$, 拟合后椭圆的长轴与 y 轴的夹角为 φ , φ 的数值见公式(10)所示, $\varphi \in [-\pi/4, +\pi/4]$, $\varphi > 0$, 椭圆在 y 轴的右侧, $\varphi < 0$, 椭圆在 y 轴的左侧; 当 $I_x < I_y$, 椭圆长轴与 x 轴的夹角为 φ , $\varphi > 0$, 椭圆在 x 轴的右侧, $\varphi < 0$, 椭圆在 x 轴的左侧。

椭圆的长半轴 l 和短半轴长 w , 由转动惯量获得, 计算结果为:

$$l = 2 \sqrt{\frac{I_{\max}}{\sum_{i=1}^n m_i}}, w = 2 \sqrt{\frac{I_{\min}}{\sum_{i=1}^n m_i}} \quad (12)$$

3.4 方法步骤

该椭圆拟合方法步骤如下:

(1) 选定图像中要拟合的目标物体, 如图 1(a) 中的水杯, 对图像进行预处理。

(2)图像预处理可以采用图像分割或运用目标模型进行概率密度投影的方法,示意图1(b)是采用对水杯颜色进行核函数直方图统计的方法获得目标模型,然后用直方图反向投影获得目标的概率密度分布图。

(3)求取目标密度分布的质心,将图像坐标系原点平移到此质心位置,求此目标密度分布对平移后坐标轴的转动惯量 I_x 、 I_y 和惯量积 I_{xy} 。

(4)将平移后的坐标轴旋转到与目标形心主轴相重合位置,如图1(c)所示,旋转角度 $\varphi \in [-\pi/4, +\pi/4]$,计算形心主轴转动惯量和惯量积,因为形心主轴惯量积为零,所以,结合平移轴的转动惯量和惯量积特性,可以推导出旋转角度 φ ,进而得到形心主轴的转动惯量,由平移轴的转动惯量和惯量积特性可得到:当 $I_x > I_y$, φ 为椭圆的长轴与原垂直 y 轴的夹角, $\varphi > 0$,椭圆偏向原 y 轴的右侧, $\varphi < 0$,椭圆偏向原 y 轴的左侧,当 $I_x < I_y$, φ 为椭圆长轴与原水平 x 轴的夹角, $\varphi > 0$,椭圆偏向原 x 轴的右侧, $\varphi < 0$,椭圆偏向原 x 轴的左侧。

(5)根据形心主轴转动惯量与椭圆长半轴 l 、短半轴 w 的关系,即公式(12),推导得出椭圆的长半轴和短半轴,图1(d)是拟合后的结果。

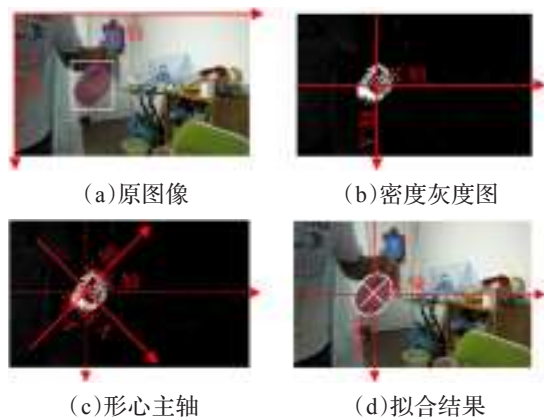


图1 椭圆拟合过程

4 实验结果与分析

实验硬件平台为Core™ i5处理器,软件平台为Win7操作系统下的Matlab仿真软件。实验测试对象为图像中具有椭圆形状的目标物体,图像预处理是首先采集目标颜色特征,然后根据目标模型投影创建概率密度分布图,对密度分布进行椭圆拟合。

第一个实验对象为倾斜的粉红色水杯图像,图像大小为1280×720,如图2所示。

图2为用水杯颜色投影创建的的概率密度分布图,图2(a)是用基于惯量矩的方法直接对密度图进行椭圆拟合后的结果。从图2(b)可见,水杯被白色椭圆形框准确圈住,椭圆长半轴 $l=112$,短半轴 $w=84$,转动惯量 $I_x > I_y$,长轴与 y 轴的夹角为 43° ,中心点坐标为(428,357),检

测时长0.0032 s。图2(c)为边缘检测的结果,图2(d)为用最小二乘法对边缘检测后二值图像进行椭圆拟合的结果,从图中可见,拟合结果并不准确,出现了偏差,分析偏差原因主要是水杯边界点不清晰,而且存在较多的杂散点,检测时长0.0259 s,显然比本文算法更加耗时,计算量更大。

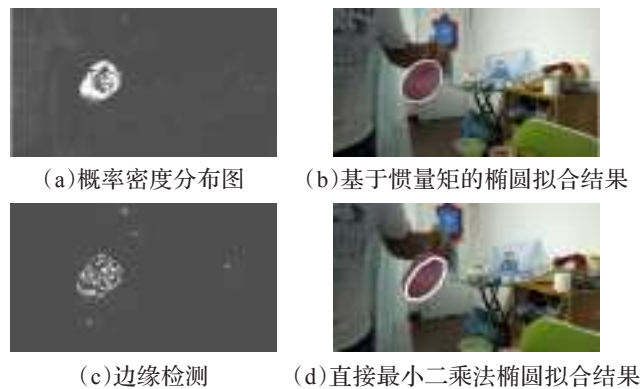


图2 水杯椭圆拟合

第二个实验为用椭圆拟合偏转的人头,图像大小为128×96,如图3所示。图3(a)为原图像,图3(b)为人头概率密度分布图,图3(c)为人头椭圆拟合结果,椭圆长半轴 $l=49$,短半轴 $w=28$,转动惯量 $I_x > I_y$,长轴与 y 轴的夹角为 -31° ,夹角为负值,椭圆向左偏转,中心点坐标为(60,54),椭圆能精确框定人头区域。图3(d)为边缘检测后用最小二乘法拟合的结果,由于无法得到准确的人头边界样本点,因而导致椭圆拟合结果出现较大误差。

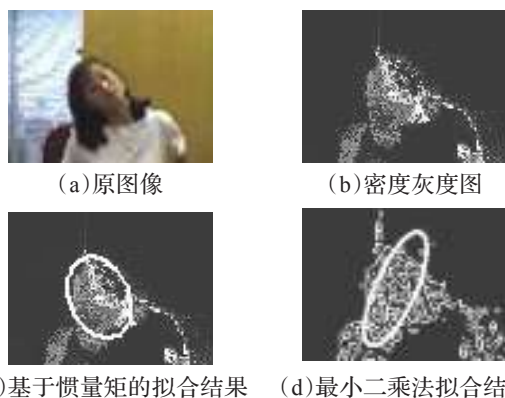


图3 人头椭圆拟合

第三个实验对象为含有任意摆放的7个鸡蛋的图像,图像大小为655×586,如图4所示,图4(a)为鸡蛋颜色概率密度分布图,图4(b)中白色圆圈是对鸡蛋进行椭圆拟合后的结果,从图中可见,白色椭圆和鸡蛋边界较为吻合。

为分析方便,将鸡蛋进行数字编号,7个鸡蛋的椭圆拟合参数见表1所示。

从表1中可见,鸡蛋1、3、7的转动惯量 $I_x < I_y$,旋转角度为椭圆长轴与 x 轴的夹角,鸡蛋1的角度为负值,

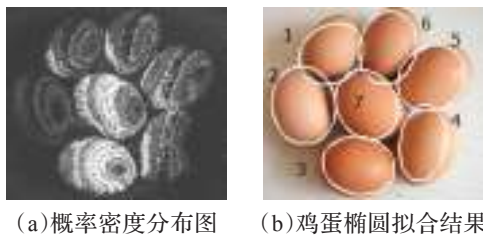


图4 鸡蛋椭圆拟合

表1 鸡蛋椭圆拟合参数

编号	惯量矩	中心点/pixel	长短轴/pixel	角度/(°)
1	$I_x < I_y$	(202,144)	(101,82)	-43.531 1
2	$I_x > I_y$	(124,298)	(125,100)	-5.581 1
3	$I_x < I_y$	(285,481)	(105,85)	14.835 1
4	$I_x > I_y$	(462,415)	(118,73)	12.326 4
5	$I_x > I_y$	(500,221)	(108,89)	35.481 6
6	$I_x > I_y$	(379,129)	(110,95)	16.056 0
7	$I_x < I_y$	(314,300)	(115,96)	42.182 9

说明拟合椭圆长轴在 x 正半轴的左侧,鸡蛋3、7角度为正,椭圆长轴在 x 正半轴的右侧;鸡蛋2、4、5、6的转动惯量 $I_x > I_y$,旋转角度为椭圆长轴与 y 轴的夹角,鸡蛋2的角度为负值,椭圆长轴在 y 正半轴的左侧,鸡蛋4、5、6的角度为正,椭圆长轴在 y 正半轴的右侧。

第四个实验为对实心椭圆形平面体的二值图像进行椭圆检测,图5(b)和图5(c)分别是对图5(a)进行右转90°和左转90°后得到的图像,图像大小为500像素×500像素,从图中可见,红色椭圆准确圈在椭圆体的外边界,各项参数见表2所示。

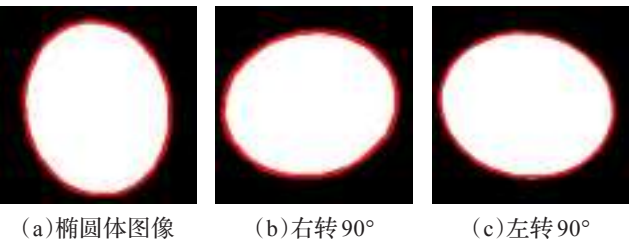


图5 实心椭圆体拟合

表2 实心椭圆检测参数

中心点/pixel	长短轴/pixel	角度/(°)	算法时间/s	
			二乘法	惯量矩
(249,259)	(219,180)	-9.965 1	0.138 1	0.017 9
(242,249)	(219,180)	-9.965 1	0.147 3	0.017 6
(242,252)	(219,180)	9.965 1	0.126 8	0.016 7

表2依次给出了各椭圆中心点坐标、长短轴大小、旋转角度和算法时间,同时给出了最小二乘算法在相同条件下的检测时长,比较可见,本文算法检测时间远低于最小二乘算法,具有实时性,且具有较高的检测精度。

5 结束语

文中提出一种不同于传统最小二乘法、Hough变换

法的椭圆拟合方法,不需要对图像进行边缘检测等预处理工作,只要获得目标的分布区域,就可以用基于惯量矩的方法计算获得椭圆参数,具有实时准确性。用目标颜色投影创建概率密度分布图,获得目标分布区域,然后用基于图像惯量矩的方法拟合椭圆,多组图像实验验证了该方法可以准确拟合椭圆。

参考文献:

[1] Comaniciu D, Meer P. Mean shift: a robust approach toward feature space analysis[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(5): 603-619.

[2] Comaniciu D, Ramesh V, Meer P. Kernel-based object tracking[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(5): 564-577.

[3] 高建坡, 王煜坚, 杨浩, 等. 基于均值移动和椭圆拟合的人脸跟踪算法[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2007, 37(1): 897-902.

[4] Andrew F, Maurizio P, Robert B F. Direct least square fitting of ellipse[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(5): 476-480.

[5] Gander W, Golub G H, Strebler R. Least-squares fitting of circles and ellipses[J]. BIT Numerical Mathematics, 1994, 34(4): 558-578.

[6] 闫蓓, 王斌, 李媛. 基于最小二乘法的椭圆拟合改进算法[J]. 北京航空航天大学学报: 自然科学版, 2008, 34(3): 295-298.

[7] 安新源, 周宗潭, 胡德文. 椭圆拟合的非线性最小二乘法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(18): 188-190.

[8] Shapiro V. Accuracy of the straight line Hough transform: the non-voting approach[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2006, 103(1): 1-21.

[9] 李良福, 冯祖仁. 一种基于随机 Hough 变换的椭圆检测算法研究[J]. 模式识别与人工智能, 2005, 18(4): 459-463.

[10] 王建锋, 吴庆标. 一种随机 Hough 变换检测圆的改进算法[J]. 计算机工程与应用, 2005, 41(14): 1-14.

[11] 屈稳太. 基于弦中点 Hough 变换的椭圆检测方法[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2005, 39(8): 1132-1135.

[12] 范怡, 傅继武. 基于中点提取的椭圆检测算法[J]. 计算机应用, 2011, 31(10): 2705-2707.

[13] Cai P K J, Miklavcic S. Improved ellipse fitting by considering the eccentricity of data point sets[C]// IEEE International Conference on Image Processing, 2013: 815-819.

[14] 李高平, 杨军, 陈毅红. 改进转动惯量特征的快速分形图像编码算法[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(24): 148-152.

[15] 罗斌. 灰度图像的惯性主轴方向特征[J]. 安徽大学学报: 自然科学版, 1998, 22(4): 40-42.

[16] Nan Liang. An approach on characteristic lines extracting of gray images using moment of inertia[C]// IEEE International Conference on Advanced Computer Control, 2010: 379-382.